数学の出題のねらい

数学 I・A に関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，確率を事象の考察に活用する能力，関数について考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

2025 年度　数学　解答例

第 1 問

問題 1

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$より，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+3^2}=\frac{1}{10}$$

$\tan\theta=3>0$から$0°<\theta<90°$より，$\cos\theta>0$となるので、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

また，

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

問題 2

$x=4n$とおく，ただしnは整数とする．$5x+4y=2000$より，

$$5\times 4n=4(500-y)$$
$$y=5(100-n)$$

xとyが自然数なので，$x=4n$と$y=5(100-n)$が自然数となるnは 1 から 99 までの値である．

したがって，自然数の組(x,y)は 99 個ある．

問題 3

xの平均$\bar{x}$と分散${s_x}^2$は，

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(7+8+5+4+6) = 6$$

$${s_x}^2 = \frac{1}{5}\{(7-6)^2+(8-6)^2+(5-6)^2+(4-6)^2+(6-6)^2\} = 2$$

yの平均$\bar{y}$と分散${s_y}^2$は，

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(3+5+1+4+2) = 3$$

$${s_y}^2 = \frac{1}{5}\{(3-3)^2+(5-3)^2+(1-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2\} = 2$$

xとyの共分散s_{xy}は，

$$s_{xy} = \frac{1}{5}\{1\times 0+2\times 2+(-1)\times(-2)+(-2)\times 1+0\times(-1)\} = 0.8$$

したがって，xとyの相関係数corは，

$$cor = \frac{s_{xy}}{\sqrt{{s_x}^2}\times\sqrt{{s_y}^2}} = \frac{0.8}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 0.4$$

第２問

問題１

製品が機械Ａ・機械Ｂ・機械Ｃで生産される確率は、

$$P(A) = 0.4 \ \ , P(B) = 0.3 \ \ , P(C) = 0.3$$

機械Ａ・機械Ｂ・機械Ｃで作られた製品が不良品である条件付き確率は、

$$P_A(E) = 0.04 \ \ , P_B(E) = 0.07 \ \ , P_C(E) = 0.05$$

よって、不良品が発生する確率は、

$$P(A) \cdot P_A(E) + \ \ P(B) \cdot \ \ P_B(E) + P(C) \cdot P_C(E) = 0.4 \times 0.04 + 0.3 \times 0.07 + 0.3 \times 0.05 = 0.052$$

よって、製品の中から１個取り出したときそれが不良品である確率は5.2%である。

問題２

不良品が機械Ａで生産される確率は、$P(A) \cdot P_A(E) = 0.4 \times 0.04 = 0.016$

１個取り出したとき不良品である確率は0.052なので、１個取り出した時不良品が機械Ａで生産した製品である条件付き確率は、

$$0.016 \div 0.052 = \frac{4}{13}$$

である。

第３問

問題１

$$-x^2+2ax+2x-6a+2=-x^2+2(a+1)x-6a+2=0$$

この式が２つの異なる解を持てばよいので，判別式より，

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(-1)(-6a+2)=a^2-4a+3=(a-1)(a-3)>0$$

から，２次関数とx軸が２つの共有点をもつ定数aの値の範囲は

$$a<1,\ a>3$$

問題２

$y=f(x)$とすると，$f(x)$は上に凸の関数なので$f(0)>0$のときに題意を満たす．このとき，

$$f(0)=-6a+2>0\leftrightarrow a<\frac{1}{3}$$

以上から，題意を満たすaの値の範囲は

$$a<\frac{1}{3}$$

問題３

条件としては，上に凸の関数なので頂点が$3 < x < 6$にあり，そのyの値は正であることとなる．さらに，$x = 3$と6のときにそのyの値は負であることを満たす必要がある．

（ｉ）上に凸の関数なので頂点が$3 < x < 6$にあり，そのyの値は正である必要があるので，

$$y = -x^2 + 2ax + 2x - 6a + 2 = -\{x - (a+1)\}^2 + (a+1)^2 - 6a + 2$$

から，

$$3 < a + 1 < 6 \leftrightarrow 2 < a < 5$$
$$(a+1)^2 - 6a + 2 = a^2 - 4a + 3 > 0 \leftrightarrow a < 1,\ a > 3$$

なので，$3 < a < 5$.

（ii）$x = 3$のとき，そのyの値は負である必要がある．

$$y = -3^2 + 2 \cdot 3 + 2 = -1$$

なので，aはどのような値でもよい．

（iii）$x = 6$のとき，そのyの値は負である必要がある．

$$y = -6^2 + 2a \cdot 6 + 2 \cdot 6 - 6a + 2 = -36 + 12a + 12 - 6a + 2 = 6a - 22 < 0$$
$$\leftrightarrow a < \frac{11}{3}$$

（ｉ）～（iii）から，求める定数aの値の範囲は

$$3 < a < \frac{11}{3}$$

第 4 問

問題 1

△ABC で正弦定理より，

$$2R = \frac{\mathrm{AB}}{\sin \angle \mathrm{ACB}}$$

なので，

$$\sin \angle \mathrm{ACB} = \frac{4}{2 \times \frac{8}{15}\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\sin^2 \angle \mathrm{ACB} + \cos^2 \angle \mathrm{ACB} = 1$ より，

$$\cos^2 \angle \mathrm{ACB} = 1 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

ここで$\angle \mathrm{ACB}$が鈍角なので，$\cos \angle \mathrm{ACB} < 0$だから，

$$\cos \angle \mathrm{ACB} = -\frac{1}{4}$$

△ABC で余弦定理より，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AB}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{CA} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos \angle \mathrm{ACB} \\
&\leftrightarrow 4^2 = \mathrm{CA}^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{CA} \\
&\leftrightarrow (\mathrm{CA} - 2)\left(\mathrm{CA} + \frac{7}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$より，$\mathrm{CA} = 2$.

問題 2

方べきの定理より，$\mathrm{PC}^2 = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}$.

△PCB と△PAC は，円の接線と弦の作る角の性質から$\angle\mathrm{PCA} = \angle\mathrm{PBC}$，また共通の角$\angle\mathrm{CPA} = \angle\mathrm{BPC}$があるので，2 つの角が同じ大きさであることから相似な三角形である．したがって，$\mathrm{PB} : \mathrm{PC} = \mathrm{BC} : \mathrm{CA}$から，

$$\mathrm{PC} \cdot \mathrm{BC} = \mathrm{PB} \cdot \mathrm{CA} \leftrightarrow \mathrm{PB} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}} \cdot \mathrm{PC}$$

これを$\mathrm{PC}^2 = \mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB}$に代入して，

$$\mathrm{PC}^2 = \mathrm{PA} \cdot \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}} \cdot \mathrm{PC} \leftrightarrow \mathrm{PC} \cdot \left(\mathrm{PC} - \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}} \cdot \mathrm{PA}\right) = 0$$

$\mathrm{PC} > 0$より，$\mathrm{PC} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}} \cdot \mathrm{PA}$となるので，

$$\mathrm{PB} = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}}\right)^2 \mathrm{PA}$$

さらに$\mathrm{PB} = \mathrm{PA} + \mathrm{AB}$なので，

$$\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CA}}\right)^2 \mathrm{PA} = \mathrm{PA} + \mathrm{AB}$$

$$\mathrm{PA} = \frac{\mathrm{AB} \cdot \mathrm{CA}^2}{\mathrm{BC}^2 - \mathrm{CA}^2} = \frac{4 \cdot 2^2}{3^2 - 2^2} = \frac{16}{5} = 3.2$$