数学の出題のねらい

　数学Ｉ・Ａに関する基本的な事項の習得度合いおよびその応用力をみることをねらいとしています．具体的には，基礎的な計算能力，関数について考察する能力，定理を図形の計量に活用する能力，確率を事象の考察に活用する能力などを総合的にみることを意図した出題を心掛けました．

2023 年度　数学　略解

第 1 問

問題 1

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{7}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}-\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$=0$$

問題 2

$x=1$のとき，$y=a+b$

$x=3$のとき，$y=3a+b$

（ｉ）$a>0$のとき，xの値が増加すると，yの値は増加するので

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a+b=5 \end{cases}$$

これを解いて，$a=1$，$b=2$.

（ⅱ）$a=0$のとき，この関数は$y=b$となるので，値域が$3 \leqq y \leqq 5$にならない.

（ⅲ）$a<0$のとき，xの値が増加すると，yの値は減少するので

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a+b=3 \end{cases}$$

これを解いて，$a=-1$，$b=6$.

（ｉ）（ⅱ）（ⅲ）から，$a=1$，$b=2$または$a=-1$，$b=6$.

問題 3
残りの 5 個の平均値は,

$$\frac{9 \times 20 - 10 \times 15}{5} = 6$$

20 個すべての値の 2 乗の平均値をaとおくと,

$$a - 9^2 = 9$$

よって,

$$a = 90$$

15 個の値の 2 乗の平均値をbとおくと,

$$b - 10^2 = 7$$

よって,

$$b = 107$$

残りの 5 個の値の分散は,

$$\frac{a \times 20 - b \times 15}{5} - 6^2 = \frac{1800 - 1605}{5} - 36 = 3$$

以上より，残り 5 個の平均値は 6，分散は 3 である.

第 2 問

問題 1

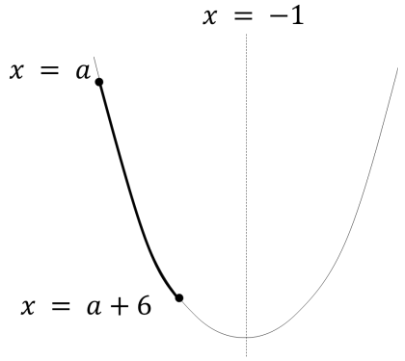
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+a=\frac{1}{2}(x+1)^2+a-\frac{1}{2}$$

$y=f(x)$とすると、そのグラフは下に凸の放物線で，軸は $x=-1$.

関数 $f(x)$ の最小値について，

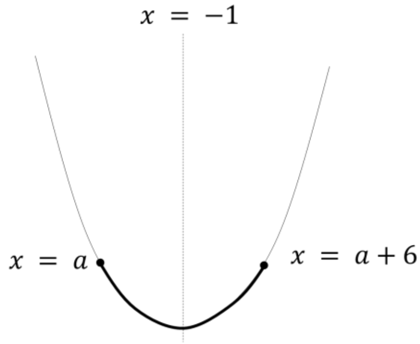
(i) $a+6<-1$ すなわち $a<-7$ のとき，
$x=a+6$ で最小となる．最小値は，

$$f(a+6)=\frac{1}{2}a^2+8a+24$$



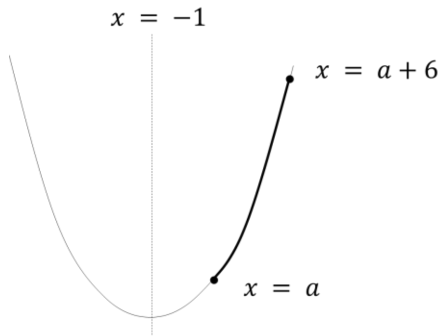
(ii) $a \leqq -1 \leqq a+6$ すなわち $-7 \leqq a \leqq -1$ のとき，$x=-1$ で最小となる．最小値は，

$$f(-1)=a-\frac{1}{2}$$



(iii) $a>-1$ のとき，$x=a$ で最小となる．
最小値は，

$$f(a)=\frac{1}{2}a^2+2a$$



以上より，

$$\begin{cases} a<-7 \text{ のとき} & x=a+6 \text{ で最小値 } \frac{1}{2}a^2+8a+24 \\ -7 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき} & x=-1 \text{ で最小値 } a-\frac{1}{2} \\ a>-1 \text{ のとき} & x=a \text{ で最小値は } \frac{1}{2}a^2+2a \end{cases}$$

問題 2

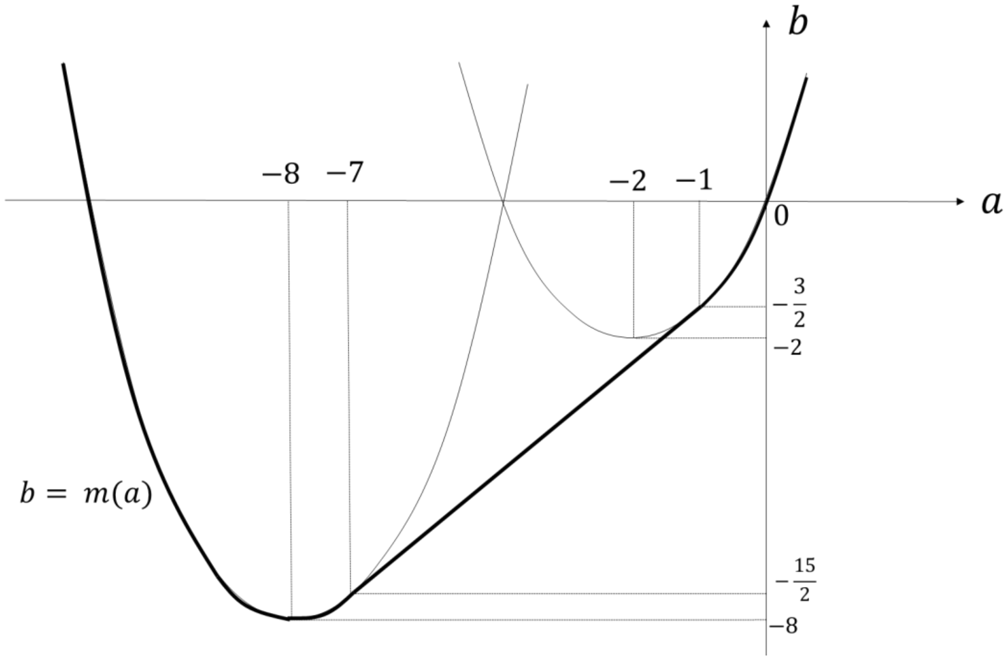
問題 1 より,

$$m(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a^2+8a+24 & (a<-7 \text{ のとき}) \\ a-\dfrac{1}{2} & (-7 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}a^2+2a & (a>-1)\end{cases}$$

なので,

$$m(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a+8)^2-8 & (a<-7 \text{ のとき}) \\ a-\dfrac{1}{2} & (-7 \leqq a \leqq -1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2}(a+2)^2-2 & (a>-1)\end{cases}$$

$b=m(a)$ とすると、そのグラフは下の図の太線部分である.



よって, 関数 $m(a)$は $a=-8$ のとき, 最小値 -8 をとる.

第 3 問
問題 1
三角形 ABC で余弦定理より，

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos\angle B = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 49$$

一方で，四角形 ABCD は円に内接することから$\angle D = 120^\circ$なので，三角形 ADC で余弦定理より，

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos\angle D = 3^2 + CD^2 - 2 \times 3 \times CD \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 9 + CD^2 + 3CD$$

となる．以上から，

$$CD^2 + 3CD + 9 = 49$$
$$(CD + 8)(CD - 5) = 0$$

ここで$CD > 0$なので，$CD = 5$.

問題 2

三角形 ABE と三角形 CDE は，角 E が共通で$\angle B = \angle EDC = 60^\circ$であることから，相似になる．このとき，$AB: CD = 8: 5$であるから，

$$AE: CE = BE: DE = 8: 5$$

になる．また，

$$AE = AD + DE = 3 + DE$$
$$BE = BC + CE = 5 + CE$$

から，

$$AE: CE = (3 + DE): CE = 8: 5 \leftrightarrow CE = \frac{15}{8} + \frac{5}{8}DE$$

$$BE: DE = (5 + CE): DE = 8: 5 \leftrightarrow DE = \frac{25}{8} + \frac{5}{8}CE$$

となるので，

$$CE = \frac{15}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{25}{8} + \frac{5}{8}CE\right) \leftrightarrow CE = \frac{245}{39}$$

また，

$$DE = \frac{25}{8} + \frac{5}{8}CE = \frac{25}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{245}{39} = \frac{275}{39}$$

問題 3

三角形 CDE の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\times \mathrm{DE}\times \mathrm{CD}\times \sin\angle \mathrm{EDC}=\frac{1}{2}\times\frac{275}{39}\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1375\sqrt{3}}{156}$$

また，三角形 CDE に内接する円の半径をrとすると，

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{DE}+\mathrm{CD}+\mathrm{CE})=\frac{1}{2}r\left(\frac{275}{39}+\frac{245}{39}+5\right)=\frac{55}{6}r$$

以上から，

$$\frac{55}{6}r=\frac{1375\sqrt{3}}{156}\leftrightarrow r=\frac{25\sqrt{3}}{26}$$

第 4 問

問題 1

グー，チョキ，パーの 3 つの手があるので，5 人でじゃんけんを 1 回したときのすべての場合の数は，

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

の 243 通りになる．

1 回目終了時にちょうど 4 人残るためには，1 人だけ負けるということになる．5 人のうち 1 人を固定して考えた場合，グーを出して負ける場合の数は，他の 4 人がパーを出す 1 通り．同様にチョキを出して負ける場合の数は 1 通りで，パーを出して負ける場合の数も 1 通りとなるので，固定した 1 人が負けてちょうど 4 人が残る場合の数は，

$$1 + 1 + 1 = 3$$

の 3 通りになる．同様に他の 4 人についても，誰か 1 人が負けて，1 回目終了時にちょうど 4 人が残る場合の数は，それぞれ 3 通りになる．以上から，1 回目終了時にちょうど 4 人が残る場合の数は，

$$3 \times 5 = 15$$

の 15 通りになる．

したがって，1 回目終了時点で 5 人からちょうど 4 人が残る確率は，

$$\frac{15}{243} = \frac{5}{81}$$

問題 2

2 回目終了時点でちょうど 4 人が残っているのは，1 回目で 4 人以上が残り，2 回目でそのうちの 4 人が残る場合である．

（ⅰ）1 回目で 5 人とも残り，2 回目で 5 人から 4 人が勝ち残る場合

1 回目で 5 人とも残る場合は，5 人とも同じ手を出す場合の 3 通りと，5 人が 3 種類の手を出す場合を考えればよい．後者は，3 人が重複する手を出す場合と，2 人ずつの 2 組がそれぞれ重複する手を出す場合がある．3 人が重複する手を出す場合は，

$$\frac{5!}{3!} \times 3 = 60$$

の 60 通りになる．2 人ずつの 2 組がそれぞれ重複する手を出す場合は，

$$\frac{5!}{2! \times 2!} \times 3 = 90$$

の 90 通りになる．以上から，1 回目で 5 人とも残る確率は，

$$\frac{3+60+90}{243}=\frac{17}{27}$$

となる．これに 2 回目で 5 人から 4 人が勝って残る確率をかければよいので，問題 1 より，

$$\frac{17}{27}\times\frac{5}{81}=\frac{85}{2187}$$

（ⅱ）1 回目で 4 人が残り，2 回目で 4 人とも残る場合

1 回目で，5 人から 4 人が残る確率は，問題 1 より$\frac{5}{81}$である．

2 回目で 4 人とも残る確率は，4 人が同じ手を出す場合の 3 通りと，4 人が 3 種類の手を出す場合を考えればよい. 後者は 2 人が重複する手を出す場合なので，

$$\frac{4!}{2!}\times 3=36$$

の 36 通りとなる．また，4 人で 1 回じゃんけんをする場合のすべての場合の数は，

$$3\times 3\times 3\times 3=81$$

の 81 通りなので，4 人でじゃんけんをして，4 人とも残る確率は，

$$\frac{3+36}{81}=\frac{13}{27}$$

となる．したがって，1 回目でちょうど 4 人が残り，2 回目でちょうど 4 人とも残る場合の確率は，

$$\frac{5}{81}\times\frac{13}{27}=\frac{65}{2187}$$

（ⅰ）（ⅱ）より，2 回目終了時点でちょうど 4 人が残っている確率は，

$$\frac{85}{2187}+\frac{65}{2187}=\frac{50}{729}$$